**1 | Dienst nach Vorschrift**

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Abbildungen? Welche der wohldefinierten Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

jeweils 1/4 Punkt

1/4 wohldefiniert

1/4 nicht injektiv, denn $(-1)^2 = 1^2$

1/4 nicht surjektiv denn $x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ also hat z.B. $-1 \in \mathbb{R}$ kein Urbild

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

1/4 wohldefiniert

1/2 Punkt

$\boxed{1/2}$ bijektiv mit Umkehrabb.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longleftarrow \mathbb{R} \\ \sqrt[3]{x} &\longleftarrow\!\shortmid\; x \end{aligned}$$

(c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x^2 \mapsto x$

$\boxed{1/2}$ nicht wohldefiniert: wird $1 = 1^2 = (-1)^2$ abgebildet auf 1 oder auf $-1$?

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

1/4 wohldefiniert

1/4 nicht surjektiv denn $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\sqrt{x} \geq 0$, also hat z.B. $-1 \in \mathbb{R}$ kein Urbild

1/4 injektiv. für $x, y \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ gilt:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow \underbrace{(\sqrt{x})^2}_{= x} = \underbrace{(\sqrt{y})^2}_{= y},$$

also $x = y$.

(e) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$\frac{a}{b} \mapsto \frac{b}{a}$$

1/4 wohldefiniert:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a/b}$$

d.h. die Abbildungsvorschrift lässt sich umformulieren zu

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

1/2 bijektiv: Abbildung ist ihre eigene Umkehrabbildung

(f) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$n \mapsto \begin{cases} n-1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

1/4 wohldefiniert

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 4 \\ 4 &\mapsto 3 \\ 5 &\mapsto 6 \\ 6 &\mapsto 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

1/2 bijektiv: Abbildung ist ihre eigene Umkehrabbildung

(g) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$

$n \mapsto$ Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von $n$

1/4 wohldefiniert

1/4 nicht injektiv:

$$\begin{aligned} 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

1/4 surjektiv: Es gibt $\infty$ viele verschiedene Primzahlen. Seien $p_1, p_2, p_3, \ldots$

also verschiedene Primzahlen.
Dann gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \longmapsto n$$

Antworten müssen begründet werden (aber nicht ausführlicher als hier).
Gesamtpunktzahl auf halbe Punkte <u>auf</u>runden.

## 2 | Schnittbild

Das Bilden von Urbildern vertauscht mit Vereinigungen und Schnitten: für beliebige Abbildungen $f\colon M \to N$ und beliebige Familien von Teilmengen $N_i \subseteq N$ gilt

$$(a)\ f^{-1}(\bigcup_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(N_i) \qquad \text{und}\ (b)\ f^{-1}(\bigcap_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(N_i).$$

(a) $x \in f^{-1}(\bigcup_i N_i) \iff f(x) \in \bigcup_i N_i$
$\iff \exists i \in I: f(x) \in N_i$
$\iff \exists i \in I: x \in f^{-1}(N_i)$
$\iff x \in \bigcup_i f^{-1}(N_i)$

1 Punkt

(b) $x \in f^{-1}(\bigcap_i N_i) \iff f(x) \in \bigcap_i N_i$
$\iff \forall i \in I: f(x) \in N_i$
$\iff \forall i \in I: x \in f^{-1}(N_i)$
$\iff x \in \bigcap_i f^{-1}(N_i)$

1 Punkt

Gilt auch $f(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f(M_i)$ für beliebige Teilmengen $M_i \subseteq M$?

Ja. $y \in f(\bigcup_i M_i)$

0,5 Punkte

$\iff \exists x \in \bigcup_i M_i : f(x) = y$
$\iff \exists i \in I: \exists x \in M_i : f(x) = y$
$\iff \exists i \in I: y \in f(M_i)$
$\iff y \in \bigcup_i f(M_i)$

1 Punkt

Gilt $f(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} f(M_i)$?

Nein. Zum Beispiel:

0,5 Punkte

$M = \{1, 2\}$ $M_1 = \{1\}$ $M_2 = \{2\}$

$N = \{0\}$

1 Punkt

$$f: M \longrightarrow N$$
$$1 \longmapsto 0$$
$$2 \longmapsto 0$$

$$f(M_1 \cap M_2) = f(\emptyset) = \emptyset$$
$$\neq$$
$$f(M_1) \cap f(M_2) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$$